Direção de um segmento orientado

Definição

Dois segmentos de reta orientados têm a mesma direção quando as respetivas retas-suporte são estritamente paralelas ou coincidentes.

Na figura 2, os segmentos orientados $[A\,,B]$, $[C\,,D]$ e $[G\,,H]$ têm a mesma direção e o **mesmo sentido**.
O segmento orientado $[E\,,F]$ tem a mesma direção e **sentido oposto** dos outros.

Direção e sentido de um segmento orientado

Definição

Dois segmentos de reta orientados $[A\,,\ B]$ e $[C\,,\ D]$ têm a mesma direção e o mesmo sentido (ou simplesmente o mesmo sentido) quando as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ tiverem o mesmo sentido e têm sentidos opostos quando tiverem a mesma direção mas não o mesmo sentido.

Comprimento de um segmento orientado

Definição

O **comprimento de um segmento de reta orientado** $[A\,,\ B]$ é o comprimento do segmento de reta $[AB]$, ou seja, a distância entre as respetivas origem e extremidade.

- $\overline{AA} = 0$
- $[AA]$ e $[A\,,\ A]$ é o próprio ponto A.

O segmento de reta $[AA]$ e o segmento orientado $[A\,,\ A]$, de extremos coincidentes, dada uma qualquer unidade de comprimento, têm comprimento igual a 0 unidades e o segmento orientado $[A\,,\ A]$ tem direção e sentido indefinidos.

Segmentos orientados equipolentes

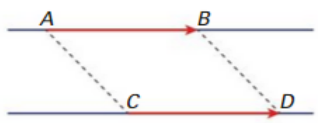
Definição

Dois **segmentos de reta orientados** são **equipolentes** quando têm a mesma direção, sentido e comprimento.

Paralelogramo e segmentos orientados equipolentes

Teorema

Os segmentos orientados $[A\,,\ B]$ e $[C\,,\ D]$ de retas-suporte distintas são equipolentes quando (e apenas quando) $[ACDB]$ é um paralelogramo.



Vetores colineares

Definição

Dois **vetores** não nulos são **colineares** quando têm a mesma direção.

Na figura 7 estão representados três vetores colineares.

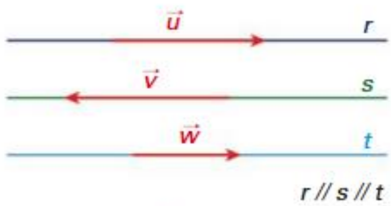


Figura 7

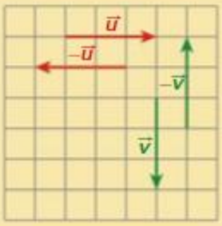
Definição

Vetores simétricos

Dois **vetores** são **simétricos** quando têm a mesma direção, o mesmo comprimento e sentidos opostos.

O simétrico do vetor $\vec{u}$ representa-se por $-\vec{u}$.

O vetor nulo é simétrico dele próprio.

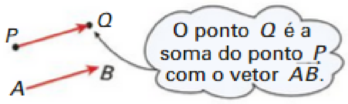


Soma de um ponto com um vetor

Observa a sequência de figuras seguinte.

1. Desenhou-se o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o ponto P.

2. Representou-se um ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.
Um tal ponto Q é único.



O ponto Q é tal que $Q = P + \overrightarrow{AB}$.

A soma de um ponto com um vetor é um ponto.

Teorema

Soma de um ponto com um vetor

Dados um ponto P e um vetor $\overrightarrow{AB}$ existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

O ponto Q é a soma de P com $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $Q = P + \overrightarrow{AB}$.

Translação de vetor $\vec{u}$

Na figura 8 podes observar que:

- $A' = A + \vec{u}$
- $B' = B + \vec{u}$
- $C' = C + \vec{u}$

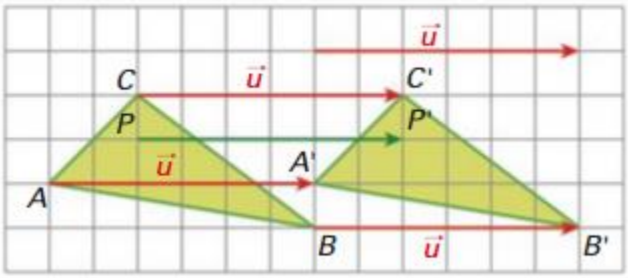


Figura 8

Definição

Translação

A translação de vetor $\vec{u}$ é a aplicação que a um ponto P associa o ponto $P' = P + \vec{u}$. A translação designa-se por $T_{\vec{u}}$ e P', a imagem de P, por $T_{\vec{u}}(P)$, ou seja, $P' = T_{\vec{u}}(P)$.

Composição de translações

$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ pode ler-se $T_{\vec{v}}$ após $T_{\vec{u}}$.

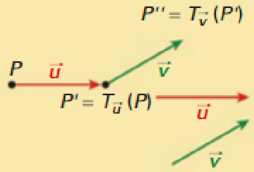
Na atividade inicial 3 verificaste que a translação $T_{\vec{u}}$ seguida da translação $T_{\vec{v}}$ produz o mesmo efeito que a translação $T_{\vec{w}}$.

À translação $T_{\vec{w}}$ dá-se o nome de composta da translação $T_{\vec{v}}$ com a translação $T_{\vec{u}}$ e representa-se por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

Definição

Composta de duas translações

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a composta da translação $T_{\vec{v}}$ com a translação $T_{\vec{u}}$ é a translação que consiste em aplicar $T_{\vec{u}}$ a um ponto P e, em seguida, $T_{\vec{v}}$ ao ponto $T_{\vec{u}}(P)$.



Representa-se por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

Soma de dois vetores

Na atividade inicial 3 observaste que $T_{\vec{w}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ (figura 4).

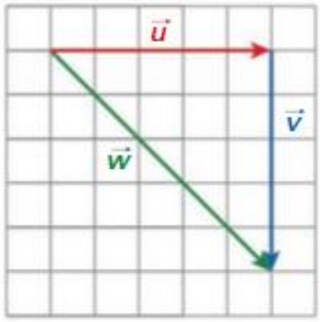


Figura 4

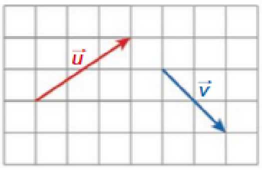
Diz-se que o vetor $\vec{w}$ é o **vetor soma** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

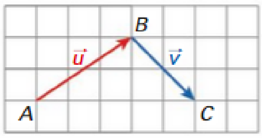
De modo geral, o vetor soma de dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é o vetor que define a translação $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

Soma de dois vetores. Regra do triângulo

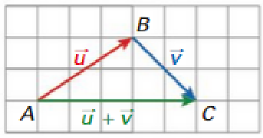
Para obter o vetor soma de dois vetores dados, procede-se do seguinte modo:



1.º $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os vetores dados.

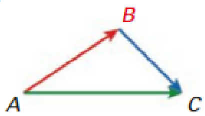


2.º Considera-se um ponto qualquer A. Determina-se $B = T_{\vec{u}}(A)$ e $C = T_{\vec{v}}(B)$.



3.º O vetor $\overrightarrow{AC}$ é a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$

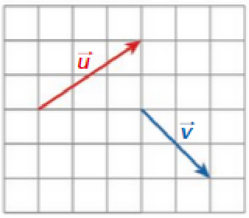
A esta forma de obter o vetor soma de dois vetores chama-se **regra do triângulo**.



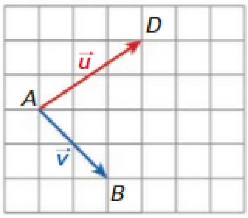
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Soma de dois vetores. Regra do paralelogramo

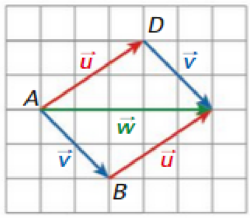
Para obtermos o vetor soma de dois vetores dados també utilizar a **regra do paralelogramo** procedendo-se do seguinte



1.º $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os vetores dados.



2.º Consideram-se os segmentos $[A, D]$ e $[A, B]$, representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com origem no ponto A.



3.º Completa-se o gramo $[ABCD$ $[AB]$ e $[AD]$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D}$
Repara que $[AC$ diagonal do para $[ABCD]$.

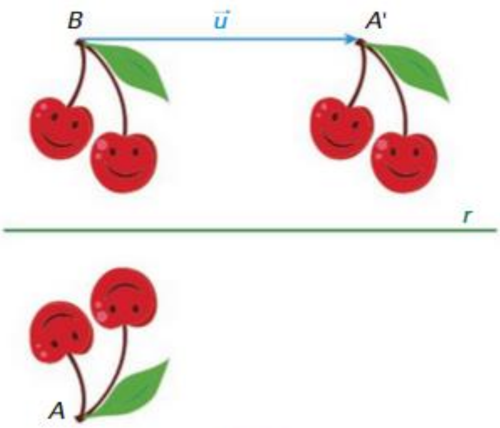


Figura 1

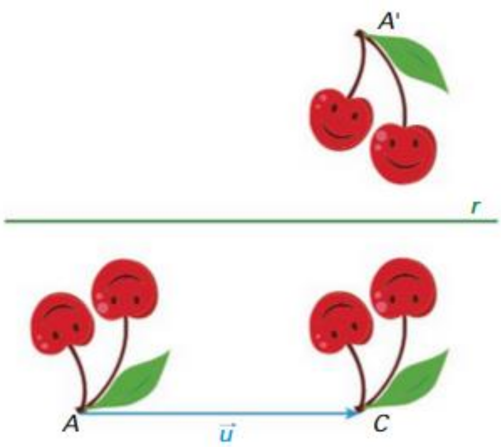


Figura 2

Definição

Reflexão deslizante

Dada uma reflexão R_r de eixo r e um vetor $\vec{u}$, não nulo, com a direção da reta r, a composta da translação $T_{\vec{u}}$ com a reflexão R_r é a aplicação que consiste em determinar a imagem de um ponto P pela reflexão R_r e, em seguida, a imagem do ponto $R_r(P)$ pela translação $T_{\vec{u}}$.

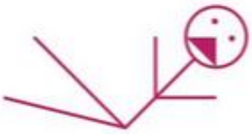
Esta aplicação designa-se por **reflexão deslizante**.

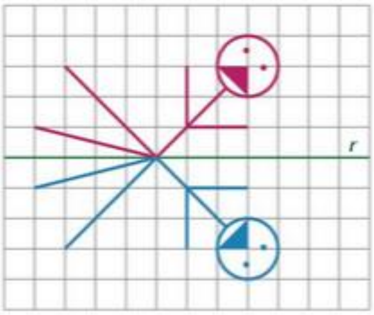
Uma **isometria** é uma transformação geométrica que conserva distâncias, isto é, a distância entre dois pontos, é igual à distância entre os seus transformados.

Recorda que uma reflexão central é uma rotação de meia volta.

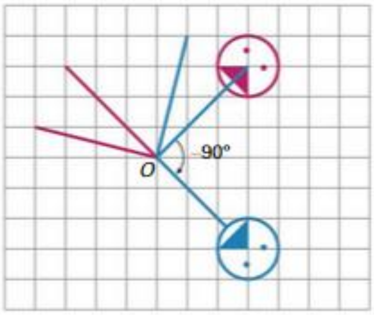
Propriedades das isometrias

Uma isometria no plano é necessariamente uma reflexão axial, uma rotação, uma translação ou uma reflexão deslizante.

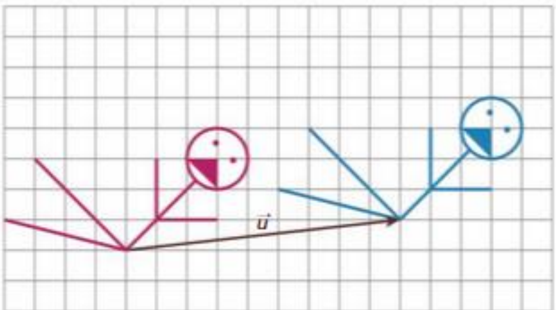




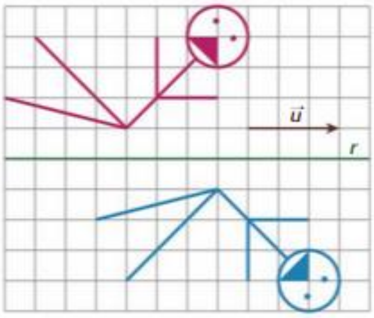
Reflexão de eixo r (R_r)



Rotação de centro O e amplitude $-90°$, $R(O, -90°)$



Translação de vetor $\vec{u}$ $(T_{\vec{u}})$



Reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{u}$

Simetrias de translação e simetrias de reflexão deslizante

Definição

Simetria de translação

Uma figura tem uma **simetria de translação** se o transformado da figura por uma translação de vetor, não nulo, for a própria figura.

Por exemplo:

Definição

Simetria de reflexão deslizante

Uma figura tem uma **simetria de reflexão deslizante** se o transformado da figura por uma dada reflexão deslizante é a própria figura.

Por exemplo:

Frisos

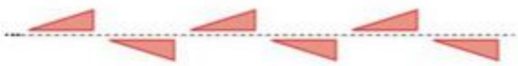
Friso é uma figura plana cujo conjunto de simetrias possui as seguintes características:

- tem simetrias de translação;
- existe um vetor $\vec{u}$ tal que todas as simetrias de translação correspondem a vetores que têm a mesma direção de $\vec{u}$ e que têm comprimentos que são múltiplos do der $\vec{u}$.

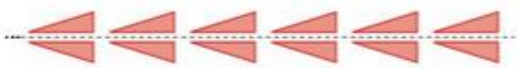
Há sete tipos de frisos.

1. Simetrias de translação

2. Simetrias de translação e de rotação (meia volta)

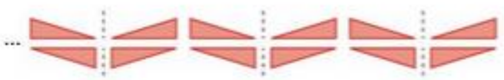


3. Simetrias de translação e de reflexão deslizante

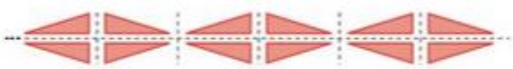


4. Simetrias de translação e de reflexão de eixo horizontal

5. Simetrias de translação e de reflexão de eixo vertical



6. Simetrias de translação, de reflexão de eixo vertical, de reflexão deslizante e de rotação



7. Simetrias de translação, de reflexão de eixo horizontal e eixo vertical e de rotação

Retirado do manual *Matemática – 8º ano, da Porto Editora* (em 28/01/2015)